Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Een gebroken functie

1 maximumscore 3

- $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ — 1
- $f'(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ voldoet niet) — 1
- $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ (dus het minimum van f is $2\sqrt{2}$) (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

2 maximumscore 5

- ($\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot k is $y = 2x$ — 1
- De integraal $\int_a^{2a} \left(2x + \frac{1}{x} - 2x\right) \mathrm{d}x = \int_a^{2a} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ moet worden berekend — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{x}$ is $\ln(x)$ ($x > 0$) — 1
- De oppervlakte is $\ln(2a) - \ln(a)$ — 1
- $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van a) — 1

of

- ($\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ dus) een vergelijking van de asymptoot k is $y = 2x$ — 1
- De integraal $\int_a^{2a} \left(2x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ min de oppervlakte van het trapezium (ingesloten door de x-as, de asymptoot en de lijnen $x = a$ en $x = 2a$) moet worden berekend — 1
- Een primitieve van f is $x^2 + \ln(x)$ ($x > 0$) — 1
- De oppervlakte is $4a^2 + \ln(2a) - a^2 - \ln(a) - \frac{1}{2}a(2a + 4a)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- Dit herleiden tot $\ln(2a) - \ln(a) = \ln(2)$ (en dat is onafhankelijk van a) — 1

3 **maximumscore 4**

- $2x+\frac{1}{x}=3$ geeft $x=0,5$ en $x=1$ — 1
- Het inzicht dat de grafiek van $f(x)-3$ gewenteld moet worden om de x-as — 1
- De inhoud van het omwentelingslichaam kan berekend worden met $\pi\int_{0,5}^{1}\left(\left(f(x)-3\right)^2\right)\mathrm{d}x$ — 1
- De gevraagde inhoud is 0,02 — 1

Buigen van metalen platen

4 **maximumscore 5**

- $P'Q'=\frac{45}{360}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2,4d=\frac{3}{5}d\cdot\pi$ — 1
- Oppervlakte $ABCD=\frac{3}{5}d\cdot\pi\cdot d=\frac{3}{5}\pi\cdot d^2$ — 1
- Oppervlakte $A'B'C'D'=\frac{45}{360}\cdot\pi\cdot(3d)^2-\frac{45}{360}\cdot\pi\cdot(2d)^2=\frac{5}{8}\pi\cdot d^2$ — 1
- $\dfrac{\frac{5}{8}\pi\cdot d^2}{\frac{3}{5}\pi\cdot d^2}=1,041...$ — 1
- Het gevraagde percentage is 4 — 1

5 **maximumscore 3**

- De vergelijking $420=\frac{R\cdot 10^2}{200}\left(1+\frac{40}{200}\right)$ moet worden opgelost — 1
- Dit geeft $R=700$ — 1
- Dus $F=980$ (kN/m) — 1

6 **maximumscore 4**

- Substitutie van formule 2 in formule 1 geeft $F=R\cdot d^{0,25}+4R\cdot d^{-0,5}$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}d}=0,25R\cdot d^{-0,75}-2R\cdot d^{-1,5}$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}d}=0$ als $d^{0,75}=8$ — 1
- Dit geeft $d=16$ — 1

Gedraaide parabool

7 maximumscore 3

- $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix} t+t^2 \\ t^2-t \end{pmatrix}$ (dus $x_Q(t) = t + t^2$ en $y_Q(t) = t^2 - t$) 1

8 maximumscore 3

- $\begin{pmatrix} x_Q{}'(t) \\ y_Q{}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t-1 \end{pmatrix}$ 1
- De snelheid van Q is $\sqrt{(1+2t)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{2+8t^2}$ 1
- $\sqrt{4+16t^2} = \sqrt{2\left(2+8t^2\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+8t^2}$ (dus $c = \sqrt{2}$) 1

Opmerking
Als in het tweede en derde antwoordelement een specifieke waarde van t is genomen, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

Vraag	Antwoord	Scores

9 **maximumscore 3**

- $L=\sqrt{\left(t+t^2-2t\right)^2+\left(t^2-t-2t^2\right)^2}$ 1
- Dit herschrijven tot $L=\sqrt{2t^4+2t^2}$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

of

- (Omdat M het midden is van OP en $\overrightarrow{MQ}\perp\overrightarrow{OP}$ geldt) $PQ=OQ$ dus
  $L=\sqrt{\left(t+t^2\right)^2+\left(t^2-t\right)^2}$ 1
- Dit herschrijven tot $L=\sqrt{2t^4+2t^2}$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

of

- $PQ^2=MP^2+MQ^2$ geeft $\left(t^2-t\right)^2+\left(-t^2-t\right)^2=\left(t^2\right)^2+t^2+\left(t^2\right)^2+\left(-t\right)^2$ 1
- Dit herschrijven tot $L^2=2t^4+2t^2$ 1
- Dus $L=\sqrt{t^2}\cdot\sqrt{2t^2+2}=|t|\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1

10 **maximumscore 4**

- Voor $t<0$ geldt $L=-t\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1
- De afgeleide van $\sqrt{2t^2+2}$ is $\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{2t^2+2}-t\cdot\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\lim\limits_{t\uparrow 0}\left(\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=-\sqrt{2}-0=-\sqrt{2}$ (dus de helling van de grafiek van L nadert tot $-\sqrt{2}$ als t vanaf links tot 0 nadert) 1

of

- Voor $t>0$ geldt $L=t\cdot\sqrt{2t^2+2}$ 1
- De afgeleide van $\sqrt{2t^2+2}$ is $\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ 1
- $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2t^2+2}+t\cdot\dfrac{4t}{2\sqrt{2t^2+2}}$ en $\lim\limits_{t\downarrow 0}\left(\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\right)=\sqrt{2}+0=\sqrt{2}$ 1
- Vanwege symmetrie nadert de helling van de grafiek van L dan tot $-\sqrt{2}$ als t vanaf links tot 0 nadert 1

Absolute sinus

11 maximumscore 3

- De y-coördinaat van A is $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de y-coördinaat van B is $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (want $-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}<0$) 1
- Het gemiddelde van $1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $1+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is 1 dus $a=1$ 1
- Dus $b=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1

12 maximumscore 5

- $f(x)=0$ als $\sin(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 1
- Dit geeft $x=\frac{4}{3}\pi\ (+k\cdot 2\pi)$ en $x=\frac{5}{3}\pi\ (+k\cdot 2\pi)$ 1
- De oppervlakte van een klein vlakdeel kan berekend worden met behulp van $\int_{\frac{4}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\left(\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $\sin(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is $-\cos(x)+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $1-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\pi$ 1

Logaritmische functies

13 maximumscore 6

- Uit $f(x)=g(x)$ volgt $(1+\mathrm{e}^2)\cdot\ln(x)=1+\mathrm{e}^2$ 1
- Dit geeft $\ln(x)=1$ dus $x=\mathrm{e}$ 1
- $f'(x)=\frac{1}{x}$ 1
- $g'(x)=-\frac{\mathrm{e}^2}{x}$ 1
- $f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $g'(\mathrm{e})=-\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}}=-\mathrm{e}$ 1
- $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot -\mathrm{e}=-1$ dus de grafieken snijden elkaar loodrecht 1

of

- $f'(x)=\frac{1}{x}$ 1
- $g'(x)=-\frac{\mathrm{e}^2}{x}$ 1
- Er moet gelden: $f'(x)\cdot g'(x)=-1$ 1
- Dit geeft $-\frac{\mathrm{e}^2}{x^2}=-1$ 1
- Dit geeft $x=\mathrm{e}$ ($x=-\mathrm{e}$ is geen oplossing) 1
- $f(\mathrm{e})=1$ en $g(\mathrm{e})=1$ (dus de grafieken snijden elkaar in $(\mathrm{e},1)$) en dus snijden de grafieken elkaar loodrecht 1

14 maximumscore 4

- $x_A=p$ en $x_B=p+3$ 1
- Voor p moet gelden $1+\mathrm{e}^2\cdot(1-\ln(p))=\ln(p+3)$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden 1
- De gevraagde waarde van q is 1,7 1

of

- $f(x_B)=q$ dus $x_B=\mathrm{e}^q$ 1
- $g(x_A)=q$ dus $x_A=\mathrm{e}^{1-\frac{q-1}{\mathrm{e}^2}}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\mathrm{e}^q-\mathrm{e}^{1-\frac{q-1}{\mathrm{e}^2}}=3$ opgelost kan worden 1
- De gevraagde waarde van q is 1,7 1

Bissectrice in een rechthoek

15 maximumscore 5

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dan volgt dat de coördinaten van D $(6,1)$ zijn 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{52}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ en
  $\cos(\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}))=\dfrac{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (dus $\angle(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF})=\angle(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$
  waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

of

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- $\overrightarrow{EP}=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ 1
- Dus de lijn door E en P en de lijn door E en D zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn EF, dus de lijn door E en F is de bissectrice van hoek PED 1

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Een vergelijking van AC is $x+2y=8$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van PF is $x-2y=4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- $\angle PEF=\angle EPC$ (Z-hoeken) dus $\tan(\angle PEF)=\tan(\angle EPC)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED)=\dfrac{D'D}{D'E}=\frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED=\angle PEF$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

of

- Uit de gelijkvormigheid van driehoek AOC met driehoek FOP volgt dat driehoek CPD gelijkbenig is, dus $DC=DP$ 1
- Hieruit volgt $y_D=\dfrac{-2+4}{2}=1$ 1
- De coördinaten van D zijn $(6,1)$ 1
- In driehoek $P'EP$ (met P' de loodrechte projectie van P op het verlengde van EF) geldt: $\tan(\angle P'EP)=\dfrac{P'P}{P'E}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 1
- In driehoek $D'ED$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF) geldt: $\tan(\angle D'ED)=\dfrac{D'D}{D'E}=\frac{2}{3}$ (dus $\angle D'ED=\angle P'EP$ waaruit volgt dat de lijn door E en F de bissectrice is van hoek PED) 1

16 **maximumscore 6**

- Een vergelijking van c is $(x-4)^2+(y-2)^2=4$ en een vergelijking van AC is $y=-\frac{1}{2}x+4$ 1
- c snijden met AC geeft $(x-4)^2+\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2=4$ dus $1\frac{1}{4}x^2-10x+16=0$ 1
- Dit geeft $D\left(4+\frac{4}{5}\sqrt{5}, 2-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 1
- Driehoek FDD'' (met D'' de loodrechte projectie van D op OA) is gelijkvormig met driehoek FPO dus $\frac{PO}{FO}=\frac{DD''}{FD''}$ 1
- Dit geeft $\frac{-p}{4}=\frac{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$ ofwel $\frac{-p}{4}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}$ 1
- Dus $p=2-2\sqrt{5}$ 1

of

- Een vergelijking van PF is $y=-\frac{1}{4}px+p$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Punt D is het snijpunt van AC met PF, dus moet gelden $-\frac{1}{4}px+p=-\frac{1}{2}x+4$ 1
- Dit geeft $D\left(\frac{4p-16}{p-2}, \frac{2p}{p-2}\right)$ 1
- $MD=2$ dus $\left(\frac{4p-16}{p-2}-4\right)^2+\left(2-\frac{2p}{p-2}\right)^2=2^2$ 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\frac{64}{(p-2)^2}+\frac{16}{(p-2)^2}=4$ 1
- $p=2-\sqrt{20}$ ($p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1

of

- $rc_{ED}=-rc_{EP}=-\frac{4-p}{4}=\frac{p-4}{4}$ 1
- $rc_{PF}=\frac{-p}{4}$ 1
- Punt M is het midden van EF, dus EF is de middellijn van de cirkel 1
- D ligt op de cirkel, dus geldt $\angle FDE=90°$ 1
- Er moet dus gelden dat $rc_{ED}\cdot rc_{PF}=\frac{p-4}{4}\cdot\frac{-p}{4}=-1$ 1
- Dan volgt $p=2-\sqrt{20}$ ($p=2+\sqrt{20}$ voldoet niet) 1

of

- Driehoek AOC is gelijkvormig met driehoek $DD'M$ (met D' de loodrechte projectie van D op EF), dus $\frac{AO}{AC} = \frac{DD'}{DM}$ en $\frac{CO}{CA} = \frac{MD'}{MD}$ 1
- $DM = 2$ en $AC = \sqrt{80}$ geeft $D'M = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ en $D'D = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ 1
- $D\left(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}, 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door F en D is $\frac{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ 1
- Een vergelijking van de lijn door F en D is $y = (\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2})(x - 4)$ 1
- Het snijpunt met de y-as is $P\left(0, 2 - 2\sqrt{5}\right)$ en dus is $p = 2 - 2\sqrt{5}$ 1

of

- Een vectorvoorstelling van AC is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en een vectorvoorstelling van PF is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ p \end{pmatrix}$ 1
- Voor het snijpunt D geldt: $\begin{cases} 8 - 2t = 4 - 4v \\ t = p \cdot v \end{cases}$ 1
- Hieruit volgt dat voor de coördinaten van D geldt $\left(4 + \frac{16}{4 - 2p}, \frac{-4p}{4 - 2p}\right)$ ofwel $\left(\frac{16 - 4p}{2 - p}, \frac{-2p}{2 - p}\right)$ 1
- $MD = 2$ dus $\left(\frac{16 - 4p}{2 - p} - 4\right)^2 + \left(2 - \frac{-2p}{2 - p}\right)^2 = 2^2$ 1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld) $\frac{64}{(2 - p)^2} + \frac{16}{(2 - p)^2} = 4$ 1
- $p = 2 - \sqrt{20}$ ($p = 2 + \sqrt{20}$ voldoet niet) 1

Exponentiële breuk

17 maximumscore 3

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ en $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$ — 1
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de eerste asymptoot volgt — 1
- Een exacte berekening waaruit de vergelijking van de tweede asymptoot volgt, dus de gevraagde afstand is 1 — 1

of

- Als x onbeperkt afneemt, dan nadert e^x naar 0 en als x onbeperkt toeneemt, dan neemt e^x onbeperkt toe — 1
- Als x onbeperkt afneemt, dan nadert $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ naar 1 — 1
- Als x onbeperkt toeneemt, dan nadert $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ naar 0 en dus is de gevraagde afstand 1 — 1

18 maximumscore 3

- $F'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 2
- $1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1} - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ $(= f(x))$
  (dus is $F(x)$ een primitieve van $f(x)$) — 1

Opmerking:
Als in het eerste antwoordelement de kettingregel niet is gebruikt, mogen voor dit antwoordelement geen scorepunten worden toegekend. Als de kettingregel wel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

19 maximumscore 4

- De oppervlakte van het vlakdeel kan worden berekend met $\int_0^a \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ — 1
- $F(a) - F(0) = a - \ln\left(\mathrm{e}^a+1\right) + \ln(2)$ — 1
- $\ln\left(\mathrm{e}^a+1\right) > \ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a$, dus $a - \ln(\mathrm{e}^a+1) < 0$ (of een gelijkwaardige redenering) — 1
- Hieruit volgt dat $F(a) - F(0) < \ln(2)$ — 1

Bronvermeldingen

Alle figuren Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2023